EVALUAREA NAȚIONALĂ LA MATEMATICĂ

29 iunie 2016 – Rezolvarea subiectelor

Subiectul I

1. $10 \cdot 5 - 50 = 50 - 50 = 0$

2. $\frac{a}{16} = \frac{7}{8} \Rightarrow 8a = 16 \cdot 7 \Rightarrow 8a = 112 \Rightarrow a = 112 : 8 \Rightarrow a = 14$

3. $(2,6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 6\} \Rightarrow$ cel mai mare număr natural care aparține intervalului este 6

4. $P_{\square} = 4 \cdot a$ și cum $a = AB = 3\,\text{cm} \Rightarrow P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

5. $m(\sphericalangle(AB, AD)) = m(\sphericalangle BAD)$, dar ABCD este pătrat, deci

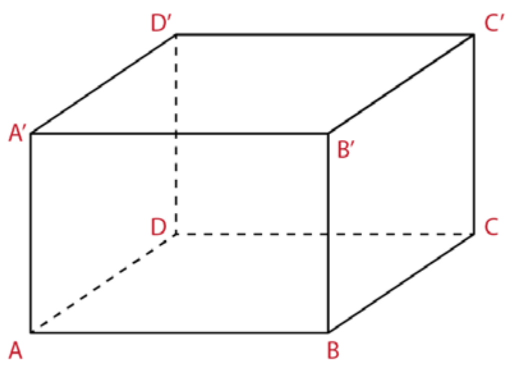
$m(\sphericalangle(AB, AD)) = m(\sphericalangle BAD) = 90^0$

6. Pe orizontală sunt reprezentate notele, iar pe verticală numărul de elevi care au obținut o anumită notă. Deoarece capătul superior al barei, care pornește din dreptul valorii 5 de pe axa orizontală, corespunde valorii 3 pe axa verticală, rezultă că 3 elevi au obținut nota 5 la test.

Răspuns: 3 elevi

Subiectul II

1.



2. $x=\sqrt{3}, y={}^{\sqrt{3})}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$${}^{x)}\frac{x}{y}+{}^{y)}\frac{y}{x}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{3+\frac{3^{(3}}{9}}{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3}}=\frac{{}^{3)}3+\frac{1}{3}}{\frac{3^{(3}}{3}}=\frac{\frac{9}{3}+\frac{1}{3}}{1}=\frac{9}{3}+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

3. Notăm cu S suma economisită de Mihai.

Suma cheltuită de Mihai este $S_c=\frac{2}{5}$ din $S\Rightarrow S_c=\frac{2}{5}\cdot S=\frac{2S}{5}$.

Suma care i-a rămas va fi $S_R={}^{5)}S-\frac{2S}{5}=\frac{5S}{5}-\frac{2S}{5}\Rightarrow S_R=\frac{3S}{5}$.

Egalăm suma rămasă cu 72 lei și rezolvăm ecuația obținută.

$$S_R=72\,\text{lei}\Rightarrow\frac{3S}{5}=72\,|\cdot5\Rightarrow 3S=72\cdot5\Rightarrow 3S=360\,|:3\Rightarrow S=360:3\Rightarrow S=120\,\text{lei}$$

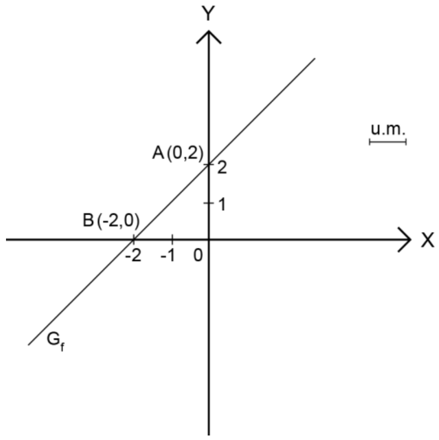
4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+2$

a) Determinăm punctele de intersecție ale reprezentării grafice cu axele de coordonate ale sistemului de axe xOy.

$G_f\cap Oy: x=0\Rightarrow f(0)=0+2=2\Rightarrow A(0,2)=G_f\cap Oy$

$G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow x=0-2\Rightarrow x=-2\Rightarrow B(-2,0)=G_f\cap Ox$

Reprezentăm cele două puncte obținute în sistemul de axe xOy, le unim și trasăm graficul funcției.



b) Triunghiul format de graficul funcției f și axele sistemului de coordonate xOy este triunghiul dreptunghic AOB. Pentru a calcula aria acestui triunghi folosim formula pentru aria triunghiului dreptunghic $A_{\triangle \text{dreptunghic}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$, unde c_1 și c_2 reprezintă catetele triunghiului.

Înlocuind, obținem $A_{\triangle AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{4}{2} = 2u^2$.

5. $E(x) = \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{1}{x^2-4} - x(x-1),\ x \in \mathbb{R}, x \neq -2, x \neq 2$

Efectuăm, pentru început, calculele din paranteze.

$$^{(x+2)(x-2))}1 + \frac{^{x+2)}1}{x-2} - \frac{^{x-2)}2}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4} + \frac{x+2}{x^2-4} - \frac{2(x-2)}{x^2-4} =$$

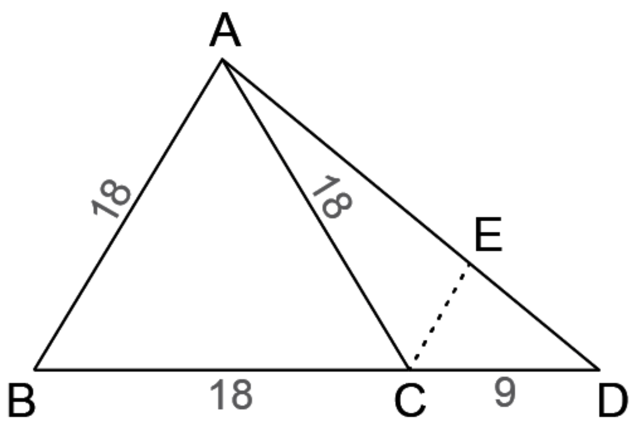
$$= \frac{x^2-4+x+2-(2x-4)}{x^2-4} = \frac{x^2+x-4+2-2x+4}{x^2-4} = \frac{x^2-x+2}{x^2-4}$$

Înlocuim rezultatul obținut în expresia lui $E(x)$.

$$E(x) = \frac{x^2-x+2}{x^2-4} : \frac{1}{x^2-4} - x(x-1) = \frac{x^2-x+2}{\cancel{x^2-4}} \cdot \frac{\cancel{x^2-4}}{1} - (x^2-x) \Rightarrow$$

$$E(x) = x^2 - x + 2 - x^2 + x \Rightarrow E(x) = 2, (\forall) x \in \mathbb{R}, x \neq -2, x \neq 2$$

Subiectul III



Subiectul 1

1. a. Deoarece triunghiul ABC este echilateral, pentru calcularea arie folosim formula

$A_{\triangle ecilateral}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, unde a este latura triunghiului. Înlocuim $a=AB=18\,m$ în formulă și

obținem $A_{\triangle ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{18^2\sqrt{3}}{4}m^2=\frac{324\sqrt{3}}{4}^{(4}m^2\Rightarrow A_{\triangle ABC}=81\sqrt{3}\,m^2$.

1. b. Din faptul că punctele B, C și D sunt coliniare, rezultă că $m(\sphericalangle BCD)=180^0$.

Obținem:

$m(\sphericalangle BCD)=m(\sphericalangle BCA)+m(\sphericalangle ACD)\Rightarrow 180^0=60^0+m(\sphericalangle ACD)\Rightarrow$
$m(\sphericalangle ACD)=180^0-60^0\Rightarrow m(\sphericalangle ACD)=120^0$

Din ipoteză avem că $m(\sphericalangle ACE)=m(\sphericalangle DCE)$ și

$m(\sphericalangle ACE)+m(\sphericalangle DCE)=m(\sphericalangle ACD)=120^0$.

Rezultă că $m(\sphericalangle ACE)=m(\sphericalangle DCE)=\frac{m(\sphericalangle ACE)}{2}=\frac{120^0}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle DCE)=60^0$.

Cum $m(\sphericalangle DBA)=m(\sphericalangle DCE)=60^0$, din faptul că unghiurile $\sphericalangle DBA$ și $\sphericalangle DCE$ sunt corespondente față de dreptele EC și AB cu secanta DB, rezultă $EC\parallel AB$.

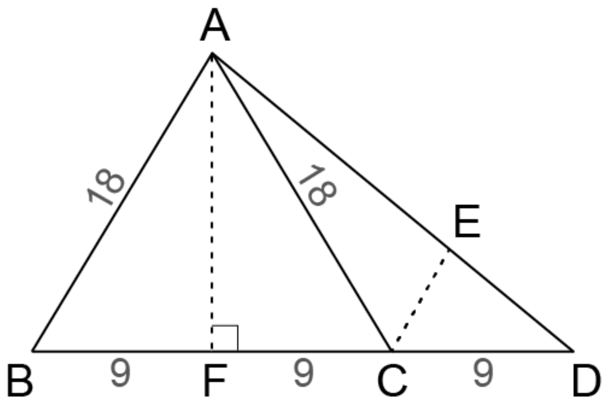
1. c. Conform subpunctului b. rezultă că $EC\parallel AB\overset{T.F.A.}{\Rightarrow}\triangle DEC\sim\triangle DAB$.

Obținem $\frac{DE}{DA}=\frac{DC}{DB}=\frac{EC}{AB}$ și, cum $\frac{DC}{DB}=\frac{DC}{DC+CB}=\frac{9}{18+9}=\frac{9}{27}^{(9}=\frac{1}{3}$, rezultă că

$\frac{EC}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{EC}{18}=\frac{1}{3}\Rightarrow EC=\frac{18\cdot 1}{3}m=\frac{18}{3}^{(3}m\Rightarrow EC=6\,m\ (1)$.

Pentru a-l afla pe AD construim $AF\perp BC$, $F\in BC$. Cum $\triangle ABC$ este echilateral,

rezultă $AF=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{BC\sqrt{3}}{2}=\frac{18\sqrt{3}}{2}^{(2}\Rightarrow AF=9\sqrt{3}\,m$.



În $\triangle AFD, m(\sphericalangle AFD)=90^0$, $FD=FC+CD=9\,m+9\,m=18\,m$ (am folosit faptul că AF este înălțime, deci și mediană în triunghiul echilateral ABC) și $AF=9\sqrt{3}\,m$.

Rezultă, aplicând Teorema lui Pitagora,

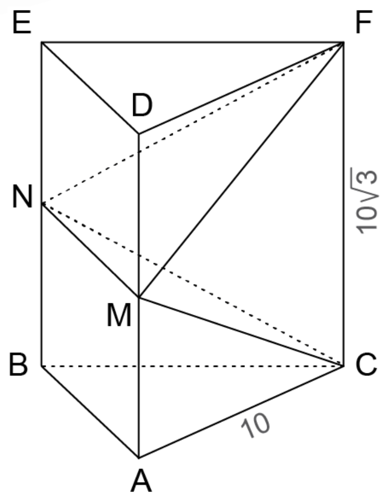
$$AD^2=AF^2+FD^2 \Rightarrow AD^2=\left(9\sqrt{3}\right)^2+18^2 \Rightarrow AD=\sqrt{9^2\cdot 3+9^2\cdot 4}\,m=\sqrt{9^2\left(3+4\right)}\,m=9\sqrt{7}\,m.$$

Dar $\frac{DE}{DA}=\frac{DC}{DB}=\frac{1}{3}$. Rezultă $\Rightarrow \frac{DE}{DA}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{DE}{9\sqrt{7}}=\frac{1}{3}\Rightarrow DE=\frac{9\sqrt{7}}{3}m\Rightarrow DE=3\sqrt{7}\,m$.

Calculăm perimetrul triunghiului EAC. Obținem:

$$P_{\triangle AEC}=AC+EC+AE=18\,m+6\,m+6\sqrt{7}\,m=24\,m+6\sqrt{7}\,m\Rightarrow P_{\triangle AEC}=6\left(4+\sqrt{7}\right)m$$

Subiectul 2



2. a. Deoarece triunghiul ABC este echilateral, pentru calcularea perimetrului folosim formula $P_{\triangle echilateral}=3\cdot a$, unde a este latura triunghiului.

Înlocuim $a = AB = 10\,\text{cm}$ în formulă și obținem

$P_{\triangle ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 10\,\text{m} \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 30\,\text{m}.$

2. b. Pentru a calcula aria laterală a prismei drepte cu baza triunghi echilteral, ABCDEF, folosim formula $A_{lat} = P_b \cdot h$, unde $P_b = P_{\triangle ABC} = 30\,\text{m}$ și $h = AD = 10\sqrt{3}\,\text{m}$.

Obținem $A_{lat} = P_b \cdot h = 30 \cdot 10\sqrt{3}\,\text{m}^2 \Rightarrow A_{lat} = 300\sqrt{3}\,\text{m}^2$.

Comparăm $300\sqrt{3}\,\text{m}^2$ cu $525\,\text{m}^2$.

$300\sqrt{3} \square 525 \,|:25$

$12\sqrt{3} \square 21 \,|:3$

$4\sqrt{3} \square 7$

$\sqrt{16 \cdot 3} \square \sqrt{7^2}$

$\sqrt{48} \square \sqrt{49}$

Cum $\sqrt{48} < \sqrt{49}$ rezultă $A_{lat} < 525\,\text{m}^2$.

2. c. Considerăm S mijlocul lui MN.

Comparăm triunghiurile $\triangle FDM$ și $\triangle FEN$:

$m(\sphericalangle E) = m(\sphericalangle D) = 90^0$;

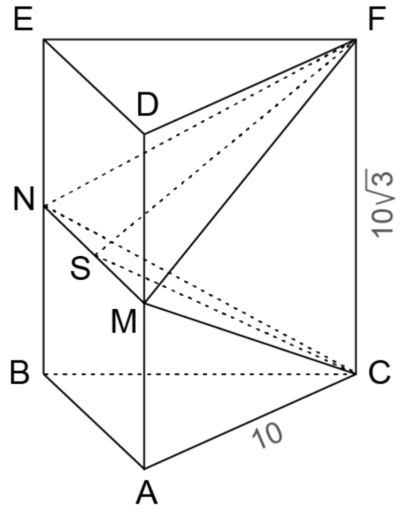
$FD = FE = 10\,\text{cm}$ ($\triangle FED$ echilateral);

$DM = EN = \frac{DA}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2}\text{cm} = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$ (M, N mijloacele lui AD, respectiv EB).

Rezultă (conform cazului de congruență Catetă – Catetă) că

$\triangle FDM \equiv \triangle FEN \Rightarrow FN = FM \Rightarrow \triangle FNM$ isoscel $\Rightarrow$ FS mediană $\Rightarrow$ FS înălțime

$\Rightarrow FS \perp MN$ (1).



Analog demonstrăm $\triangle CAM \equiv \triangle CBN (C.C.) \Rightarrow CM = CN \Rightarrow \triangle CNM$ isoscel $\Rightarrow CS$ mediană $\Rightarrow CS$ înălțime $\Rightarrow CS \perp MN$ (2).

Dar $(FNM) \cap (CMN) = MN (3)$ și $FS \subset (FNM)$, respectiv $CS \subset (CNM)$ (4). Din $(1), (2), (3)$ și (4) rezultă că $m(\sphericalangle((CMN),(FMN))) = m(\sphericalangle CSF)$.

Calculăm FS din $\triangle FSN$ (dreptunghic în S).

Pentru început, îl determinăm pe FN.

$$\triangle FEN,\ m(\sphericalangle E) = 90^0, FE = 10\,cm, EN = \frac{EB}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2}\,cm = 5\sqrt{3}\,cm \overset{T.P.}{\Rightarrow}$$

$$FN^2 = FE^2 + EN^2 \Rightarrow FN^2 = 10^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 100 + 75 \Rightarrow FN = \sqrt{175}\,cm \Rightarrow FN = 5\sqrt{7}\,cm.$$

În $\triangle FSN, m(\sphericalangle S) = 90^0$:

$$\left.\begin{array}{l} FN = 5\sqrt{7}\,cm \\ SN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{10}{2}\,cm = 5\,cm \end{array}\right\} \overset{T.P.}{\Rightarrow} FN^2 = SN^2 + FS^2 \Rightarrow FS^2 = FN^2 - SN^2 \Rightarrow$$

$$FS^2 = \left(5\sqrt{7}\right)^2 - 5^2 = 25 \cdot 7 - 25 = 175 - 25 \Rightarrow FS = \sqrt{150}\,cm \Rightarrow FS = 5\sqrt{6}\,cm.$$

Comparăm în continuare triunghiurile $\triangle FEN$ și $\triangle CBN$:

$m(\sphericalangle E) = m(\sphericalangle B) = 90^0$;

$FE = BC = 10\,cm$;

$EN = BN = 5\sqrt{3}\,cm$.

Rezultă (conform cazului de congruență Catetă – Catetă) că

$\triangle FEN \equiv \triangle CBN \Rightarrow CN = FN = 5\sqrt{7}\,cm$

În $\triangle CNS, m(\sphericalangle S)=90^0$, $NS=5\text{cm}$ și $CN=5\sqrt{7}\text{ cm}$.

$$\overset{T.P.}{\Rightarrow} CN^2=NS^2+CS^2 \Rightarrow CS^2=CN^2-NS^2=\left(5\sqrt{7}\right)^2-5^2 \Rightarrow$$

$$CS=\sqrt{175-25}\text{ cm}=\sqrt{150}\text{ cm} \Rightarrow CS=5\sqrt{6}\text{ cm}$$

În $\triangle FSN$ cunoaștem $FS=SC=5\sqrt{6}\text{ cm}$ și $FC=10\sqrt{3}\text{ cm}$. Aplicăm Reciproca Teoremei lui Pitagora și rezultă:

$$FC^2=FS^2+SC^2 \Leftrightarrow \left(10\sqrt{3}\right)^2=\left(5\sqrt{6}\right)^2+\left(5\sqrt{6}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$100\cdot 3=25\cdot 6+25\cdot 6 \Leftrightarrow 300=150+150 \Leftrightarrow 300=300$$

Conform reciprocei Teoremei lui Pitagora, rezultă

$$m(\sphericalangle FSC)=90^0 \Rightarrow m\left(\sphericalangle\left((CMN),(FMN)\right)\right)=90^0 \Rightarrow$$

planele (CMN) și (FMN) sunt perpendiculare.