SIMULARE EVALUAREA NAȚIONALĂ LA MATEMATICĂ

23 februarie 2016 – Rezolvarea subiectelor

Subiectul I. 1.

Rezultatul calculului $\mathbf{25 - 25 : (2 + 3)}$ este ....

$25 - 25 : \underbrace{(2 + 3)}_{1}$

1. Deoarece în calcul apar paranteze, rezolvăm prima dată operația din paranteze.

$25 - \underbrace{25 : 5}_{2}$

2. Efectuăm apoi operația de ordinul doi, adică împărțirea.

$\underbrace{25 - 5}_{3}$

3. Pentru a afla rezultatul final, realizăm scăderea.

20

Subiectul I. 2.

Numărul pătratelor perfecte din mulțimea numerelor naturale de două cifre este egal cu ....

PASUL 1 Determinăm cel mai mic pătrat perfect de două cifre. $4^2 = 16$

PASUL 2 Determinăm cel mai mare pătrat perfect de două cifre. $9^2 = 81$

PASUL 3 Scriem mulțimea numerelor naturale a căror pătrate perfecte au două cifre. $A=\{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 9\}$

PASUL 4 Determinăm cel mai mare pătrat perfect de două cifre. $9-4+1=6$

Soluție alternativă: **Scriem toate pătratele perfecte de două cifre și le numărăm. Obținem: 16, 25, 36, 49, 64, 81, adică 6 pătrate perfecte.**

Subiectul I. 3.

Dacă A este mulțimea numerelor naturale pare și B este mulțimea numerelor naturale impare, atunci mulțimea $A \cap B$ este egală cu ....

PASUL 1 Scriem mulțimea numerelor naturale pare (numerele care se împart exact la 2). $A=\{x=2\cdot k \mid k\in\mathbb{N}\}$

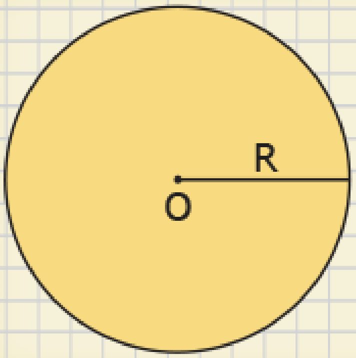
PASUL 2 Scriem mulțimea numerelor naturale impare (numerele care nu se împart exact la 2, dau restul 1). $B=\{x=2\cdot k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$

PASUL 3 Un număr natural nu poate fi în același timp și par și impar. $2\cdot k\neq 2\cdot k+1, \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow$
Scriem rezultatul intersecției dintre cele două mulțimi. $\Rightarrow A\cap B=\emptyset$

Subiectul I. 4.

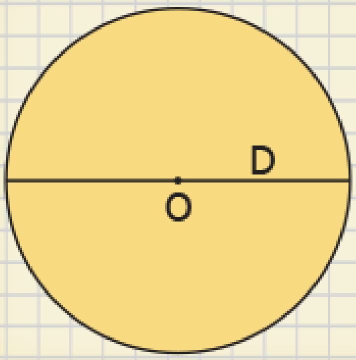
Un cerc are lungimea egală cu 20 π cm.

Diametrul cercului este ...cm.



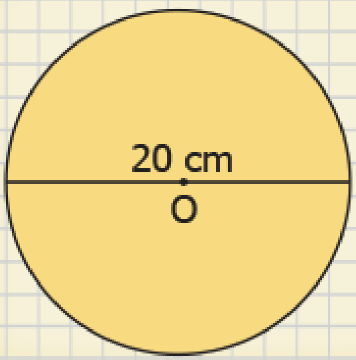
1. Pornim de la formula pentru lungimea cercului în funcție de raza sa, R.

$L_o = 2\pi R$



2. Apoi, scriem formula pentru lungimea cercului în funcție de diametrul D.

$L_o = \pi \cdot D$



3. Rezolvăm ecuația obținută prin înlocuirea lungimii cercului cu 20 π și aflăm diametrul.

$L_o = 20\pi$ cm

20π cm $= \pi \cdot D \Rightarrow D = 20$ cm.

Subiectul I. 5.

În *Figura 1* este reprezentat un cub ABCDA′B′C′D′ cu AB = 3 cm. Aria dreptunghiului ACC′A′ este egală cu ... cm².

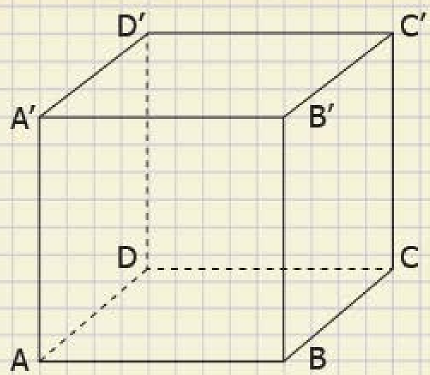


Figura 1

Scriem datele problemei:

ABCDA′B′C′D′ cub

AB = 3 cm

$A_{ACC'A'} = ?$

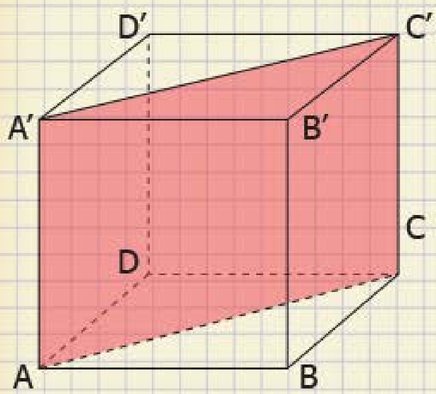
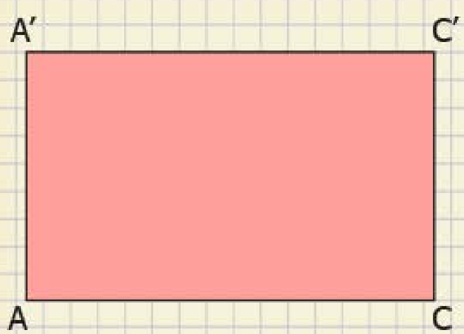


Figura 2

Desenăm secțiunea ACC′A′ (*Figura 2*). Cum AA′ și CC′ sunt muchii laterale ale cubului, rezultă că $AA' = CC' = AB = 3$ cm. Pentru a calcula AC și A′C′, care sunt diagonalele bazelor, folosim formula pentru diagonala pătratului $d = a\sqrt{2}$, sau aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, dreptunghic în B. Rezultă $AC = A'C' = AB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.



Construim dreptunghiul ACC′A′. Aria dreptunghiului ACC′A′ este dată de formula $A_{dreptunghi} = L \cdot l$, unde $L = AC$ este lungimea și $l = AA'$ este lățimea. Obținem:

$A_{ACC'A'} = AC \cdot AA' = 3\sqrt{2}\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 9\sqrt{2}\text{ cm}^2$.

Subiectul I. 6.

În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei clase a VIII-a, în funcție de mediile obținute la matematică, pe semestrul I.

Media	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	3	6	7	5	4	2

Numărul elevilor din această clasă care au obținut la matematică, pe semestrul I, cel puțin media 6 și cel mult media 9 este egal cu....

Media	4	5	**6**	**7**	**8**	**9**	10
Nr. elevi	1	3	**6**	**7**	**5**	**4**	2

1. Interpretăm datele problemei:
- „cel puțin **6**” înseamnă **6** sau mai mare decât **6**;
- „cel mult **9**” înseamnă **9** sau mai mic decât **9**.

Media	4	5	**6**	**7**	**8**	**9**	10
Nr. elevi	1	3	6	7	5	4	2

2. Elevii care îndeplinesc condițiile din cerință sunt cei care au obținut mediile **6, 7, 8** și **9**.

Media	4	5	**6**	**7**	**8**	**9**	10
Nr. elevi	1	3	**6**	**7**	**5**	**4**	2

3. În total sunt $6+7+5+4=22$ **elevi**.

Subiectul II. 1.

Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și baza ABCD.

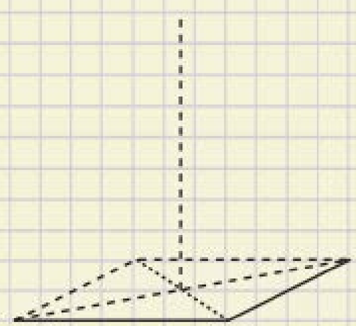
PASUL 1

Construim baza piramidei pe care, deși este pătrat, o desenăm ca pe un paralelogram.

Apoi îi trasăm diagonalele.

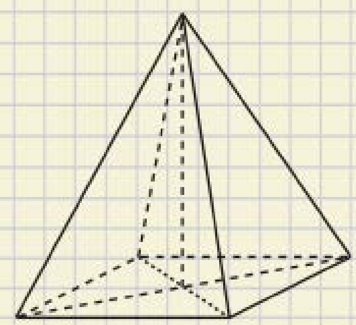
PASUL 2

Prin punctul de intersecție al diagonalelor construim perpendiculara pe planul bazei.



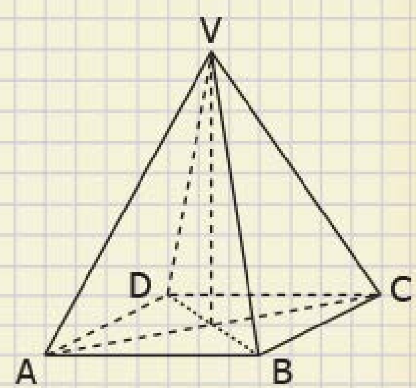
PASUL 3

Unim capătul înălțimii, care nu aparține planului bazei, cu vârfurile bazei și obținem o piramidă patrulateră regulată.



PASUL 4

Notăm cu **V**, vârful piramidei și baza cu **ABCD**.



Subiectul II. 2.

Determinați numărul natural de trei cifre, de forma $\overline{abc}$, știind că și $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ și $a \neq 0$.

PASUL 1

Scriem toate numerele în baza zece și le înlocuim în egalitate.

Rezultă $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, respectiv $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{bc} = 10b + c$ și $\overline{ca} = 10c + a$.

PASUL 2

Înlocuim în egalitatea din enunț și obținem:

$100a + 10b + c = 10a + b + 10b + c + 10c + a \Leftrightarrow$

$100a - a - 10a = 11b - 10b + 11c - c \Leftrightarrow 89a = b + 10c$ (1)

PASUL 3

Cum $0 \leq b \leq 9$ și $0 \leq c \leq 9$ rezultă că $0 \leq 10c \leq 90$ și, de aici, $0 \leq b + 10c \leq 99$. Obținem faptul că $b + 10c \leq 99$ și, de aici, rezultă că $89a \leq 89$, $a \neq 0 \Leftrightarrow 89a = 89$, deci singura valoare posibilă pentru a este 1.

PASUL 4

Înlocuim în relația (1) pe a cu 1 și obținem

$89 \cdot 1 = b + 10c \Leftrightarrow 89 = 10c + b \Leftrightarrow 8 \cdot 10 + 9 = 10c + b$.

De aici rezultă că $b = 9$ și $c = 8$.

În concluzie, numărul $\overline{abc}$ este egal cu 198.

Subiectul II. 3.

Un turist a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi turistul a parcurs jumătate din lungimea traseului, în a doua zi turistul a parcurs jumătate din distanța parcursă în prima zi, iar a treia zi restul de 5 km. Calculați lungimea traseului parcurs în cele trei zile.

PASUL 1 Notăm cu x lungimea întregului traseu.

Apoi transpunem datele problemei în relații matematice. Rezultă:

ziua 1: jumătate din lungimea traseului, adică $\frac{x}{2}$;

ziua 2: jumătate din distanța parcursă în prima zi, adică $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{4}$;

ziua 3: restul de 5 km.

PASUL 2 Obținem, astfel, ecuația $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+5=x$. După ce aducem la același numitor, această ecuație devine

$$^{2)}\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+{}^{4)}5={}^{4)}x \Leftrightarrow 2x+x+20=4x \Leftrightarrow 3x+20=4x.$$

PASUL 3 Rezolvăm ecuația determinată anterior și rezultă

$20=4x-3x \Leftrightarrow 20=x.$

În concluzie, lungimea întregului traseu este de 20 km.

Subiectul II. 4. a)

Se consideră numerele $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{4}{\sqrt{32}}$ și $b = \frac{\sqrt{13^2 - 5^2}}{\sqrt{10^2 - 8^2}}$.

Arătați că $a = 2\sqrt{2}$.

PASUL 1

Pentru început, **scoatem factorii din radicalii de la numitorul fracțiilor și simplificăm**. Rezultă:

$a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2^{(2}}{2\sqrt{2}} + \frac{3^{(3}}{3\sqrt{2}} + \frac{4^{(4}}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{4}{\sqrt{2}}$.

PASUL 2

Raționalizăm numitorul și simplificăm, dacă este posibil.

Obținem $a = {}^{\sqrt{2})}\frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{4\sqrt{2}^{(2}}{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$.

Subiectul II. 4. b)

Se consideră numerele $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{4}{\sqrt{32}}$ și $b = \frac{\sqrt{13^2 - 5^2}}{\sqrt{10^2 - 8^2}}$.

Calculați $a^2 - b^2$.

PASUL 1

Calculăm, separat, a^2 și b^2. Obținem:

$a^2 = (2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 \Rightarrow a^2 = 8$ și

$b^2 = \left(\frac{\sqrt{13^2 - 5^2}}{\sqrt{10^2 - 8^2}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{13^2 - 5^2})^2}{(\sqrt{10^2 - 8^2})^2}$.

PASUL 2

Cum **sub radicali avem numere pozitive**, rezultă

$b^2 = \frac{13^2 - 5^2}{10^2 - 8^2} = \frac{169 - 25}{100 - 64} \Rightarrow b^2 = \frac{144^{(36}}{36} \Rightarrow b^2 = 4$.

PASUL 3

Înlocuim a^2 și b^2 în relația din cerință și obținem

$a^2 - b^2 = 8 - 4 = 4$.

Subiectul II. 5.

Se consideră $E(x) = x^3 + (x+1)^2 + 2(x+3)(x-3) + 17$, unde x este un număr real. Arătați că numărul $E(n)$ este multiplu de 6, pentru orice număr natural.

PASUL 1

Ridicăm la pătrat prima paranteză și calculăm produsul următoarelor două paranteze.

$(x+1)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

$2(x+3)(x-3) = 2(x^2 - 3^2) = 2(x^2 - 9) = 2x^2 - 18$

PASUL 2

Înlocuim rezultatele obținute **în expresie** și **reducem termenii asemenea**. Rezultă

$E(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 18 + 17 = x^3 + 3x^2 + 2x + 18 - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(x) = x^3 + 3x^2 + 2x.$

PASUL 3

Înlocuim pe x cu n în expresie și descompunem în produs de factori ireductibili. Obținem:

$E(n) = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow E(n) = n(n^2 + n + 2n + 2) = n\,[n\,(n+1) + 2(n+1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow E(n) = n(n+1)(n+2).$

PASUL 4

Având două numere consecutive, evident unul dintre ele este număr par. Cum în E(n) avem produsul a două numere consecutive rezultă $E(n) \vdots 2$.

PASUL 5

De asemenea, din faptul că produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 3, rezultă că $E(n) \vdots 3$. Deoarece $E(n) \vdots 2$ și $E(n) \vdots 3$, iar 2 și 3 sunt numere prime între ele, rezultă $E(n) \vdots 2\cdot 3 \Rightarrow E(n) \vdots 6$.

Deci $E(n)$ este **multiplu de 6**, pentru orice număr natural n.

Subiectul III. 1

Figura 2 reprezintă schița unui teren format din pătratul ABCD cu AB = 60 m și trapezul isoscel AEFB cu AB || EF, EF = 180 m și AE = $60\sqrt{2}$ m.

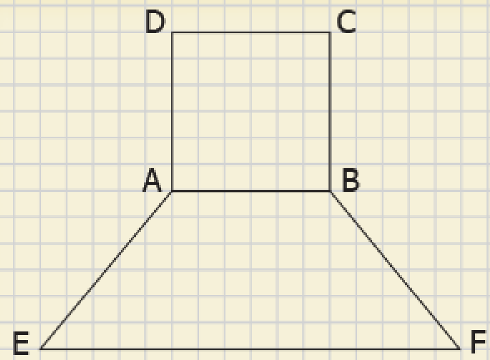
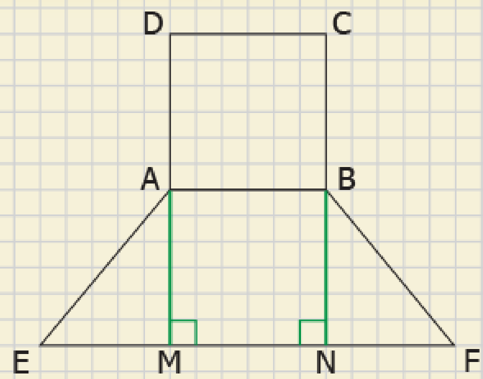


Figura 2

III. 1 a) Arătați că distanța de la punctul A la dreapta EF este egală cu 60 m.



PASUL 1 Construim perpendiculara din A pe EF, $AM \perp EF$, $M \in EF$ și perpendiculara din B pe EF, $BN \perp EF$, $N \in EF$. Obținem astfel dreptunghiul ABNM cu $MN = AB$ și triunghiurile dreptunghice congruente AME și BNF, de unde $EM = FN = \frac{B-b}{2}$, unde B este baza mare și b este baza mică.

Obținem $ME = \frac{EF - AB}{2} = \frac{180 - 60}{2} = \frac{120}{2} = 60$ m.

PASUL 2 **Aplicăm teorema lui Pitagora** în triunghiul AME, $m(\sphericalangle AME) = 90^\circ$, în care cunoaștem $ME = 60$ m și $AE = 60\sqrt{2}$ m. Rezultă

$$AE^2 = ME^2 + AM^2 \Leftrightarrow AM^2 = AE^2 - ME^2 \Rightarrow AM = \sqrt{(60\sqrt{2})^2 - 60^2} =$$
$$= \sqrt{7200 - 3600} = \sqrt{3600} = 60 \text{ m}.$$

III. 1 b) Calculați aria suprafeței terenului.

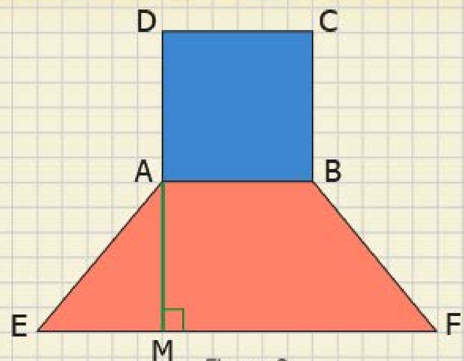


Figura 2

PASUL 1

Calculăm aria suprafeței terenului ca sumă dintre aria pătratului ABCD și aria trapezului AEFB.

Cum ABCD **este pătrat având latura** AB = 60 m, rezultă că

$A_{ABCD} = AB^2 = 60\ m^2 \Rightarrow A_{ABCD} = 3600\ m^2$

PASUL 2

Aria trapezului AEFB o calculăm folosind formula $A_{trapez} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$,

unde **baza mare** este B = EF = 180 m, **baza mică** este b = AB = 60 m

și **înălțimea** este h = AM = 60 m.

Obținem $A_{AEFB} = \frac{(180+60)\cdot 60}{2} = \frac{240\cdot 60}{2}\ m^2 \Rightarrow A_{AEFB} = 120\cdot 60\ m^2 \Rightarrow$

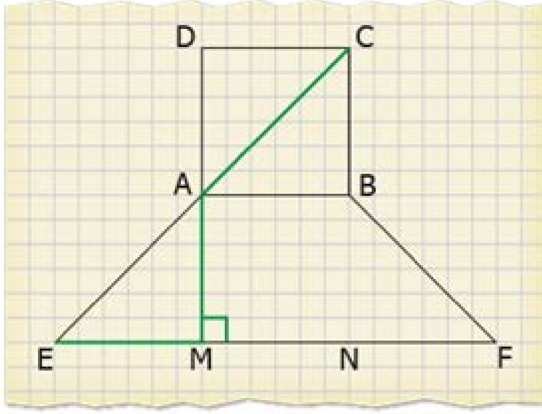
$\Rightarrow A_{AEFB} = 7200\ m^2$.

PASUL 3

Determinăm **aria terenului ca suma celor două arii calculate la pașii anteriori**. Obținem

$A_{teren} = A_{ABCD} + A_{AEFB} \Rightarrow A_{teren} = 3600\ m^2 + 7200\ m^2 = 10800\ m^2$.

III. 1 c) Demonstrați că punctele E, A și C sunt coliniare.



PASUL 1

Vom arăta că măsura unghiului EAC este de 180°.

Construim diagonala AC a pătratului ABCD.

Deoarece AC este **diagonală în pătrat** rezultă că **AC este bisectoarea unghiului A**, deci $m(\sphericalangle BAC) = \frac{m(\sphericalangle A)}{2} = \frac{90^\circ}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$. (1)

PASUL 2

În **trapezul AMFB**, $AM \perp FE$ și $AB \parallel MF$, deci $m(\sphericalangle BAM) = 90^\circ$. (2)

Considerăm acum **triunghiul dreptunghic AME**, $m(\sphericalangle AME) = 90^\circ$.

Conform punctului a) am arătat că $AM = 60$ m și, cum $ME = 60$ m,

rezultă că **$\triangle$AME este dreptunghic isoscel**, deci $m(\sphericalangle MAE) = 45^\circ$. (3)

PASUL 3

Nu ne mai rămâne decât să **calculăm măsura unghiului EAC ca suma măsurilor celor trei unghiuri** determinate la pașii anteriori.

Din (1), (2) și (3) rezultă că

$m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle EAM) + m(\sphericalangle MAB) + m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ =$

$= 180^\circ$, deci **punctele E, A și C sunt coliniare**.

Subiectul III. 2

În *Figura 3* este reprezentată schematic o platformă în formă de pătrat $ABCD$ cu latura de 16 m. Segmentul SO, unde $\{O\} = AC \cap BD$, reprezintă o antenă de telefonie mobilă amplasată perpendicular pe planul pătratului $ABCD$. Antena este ancorată cu patru cabluri SB, SD, VM și VN, unde punctul V este situat pe segmentul SO, iar M și N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AD. Cablul SB face cu planul pătratului $ABCD$ un unghi de 60°.

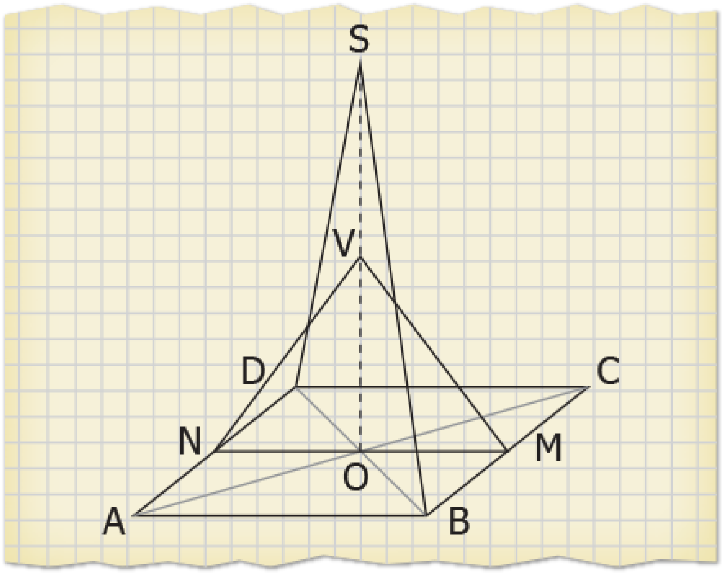


Figura 3

III. 2. a) Calculați înălțimea antenei SO.

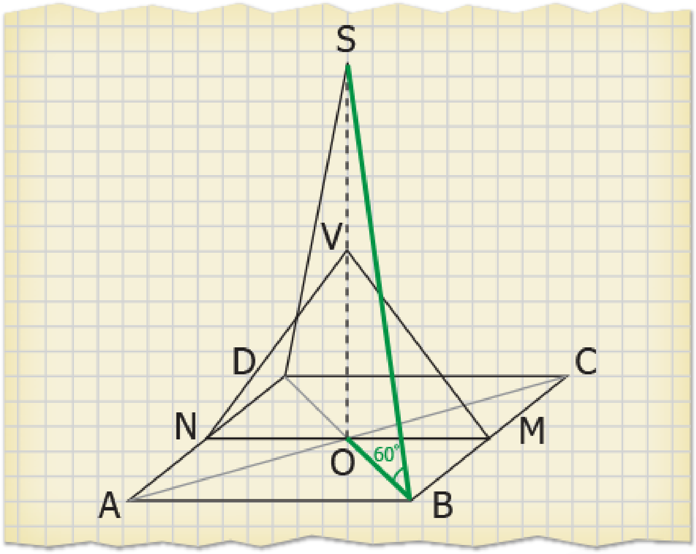
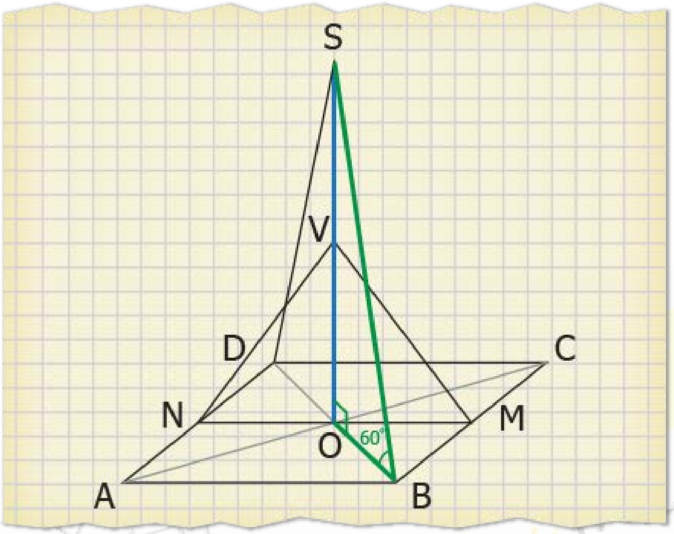


Figura 3

PASUL 1

Din faptul că $SO \perp (ABC)$ și din faptul că $BO \subset (ABC) \Rightarrow SO \perp BO$ și din faptul că $SB \cap (ABC) = \{B\}$ rezultă că **proiecția lui SB pe planul (ABC) este BO**. Obținem astfel că $m(\sphericalangle(SB,(ABC))) =$ $= m(\sphericalangle(SB, OB)) =$ **$m(\sphericalangle SBO) = 60^{\circ}$**.

PASUL 2 Pentru a afla lungimea lui SO vom folosi triunghiul dreptunghic SOB, $m(\sphericalangle SOB) = 90^\circ$, în care cunoaștem deja un unghi. Avem nevoie de lungimea unei laturi. Putem afla OB ca jumătate din diagonala pătratului ABCD. Cum BD este **diagonală în pătratul ABCD** de latură $a = 16$ m, rezultă că $BD = a\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ m. Rezultă că $BO = \frac{BD}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2}$ m $\Rightarrow$
$\Rightarrow BO = 8\sqrt{2}$ m.



PASUL 3 În **triunghiul dreptunghic SOB calculăm tangenta unghiului** SBO.

Rezultă

$$tg(\sphericalangle SBO) = \frac{cat_{op}}{cat_{al}} = \frac{SO}{BO} = \frac{SO}{8\sqrt{2}} \quad (1).$$

Dar $m(\sphericalangle SBO) = 60^\circ$, rezultă

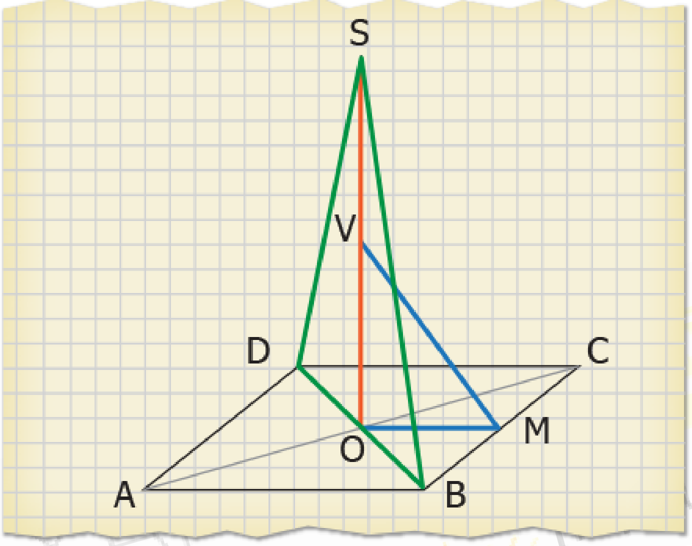
$tg(\sphericalangle SBO) = tg\,60^\circ = \sqrt{3}$ (2).

PASUL 4 Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\frac{SO}{8\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SO = 8\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ m $\Rightarrow$
$\Rightarrow SO = 8\sqrt{6}$ m.

III. 2 b) Determinați măsura unghiului dintre planele (VOM) și (SOB).

PASUL 1

Determinăm, pentru început, **dreapta de intersecție a celor două plane**. Din faptul că $SO \subset (SOB)$, $VO \subset (VOM)$ și $V \in SO$ rezultă că $(VOM) \cap (SOB) = VO$ (1).



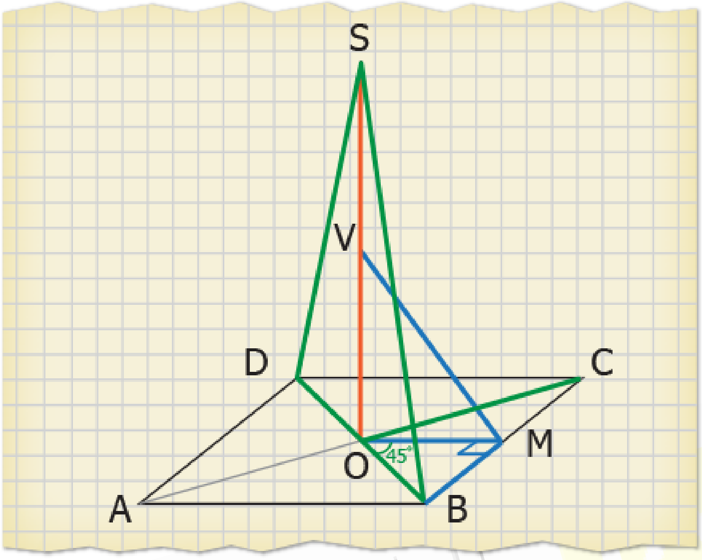
PASUL 2

Din $VO \perp (ABC)$ și $BO \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp BO$ (2), iar din $VO \perp (ABC)$ și $MO \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp MO$ (3).

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă că

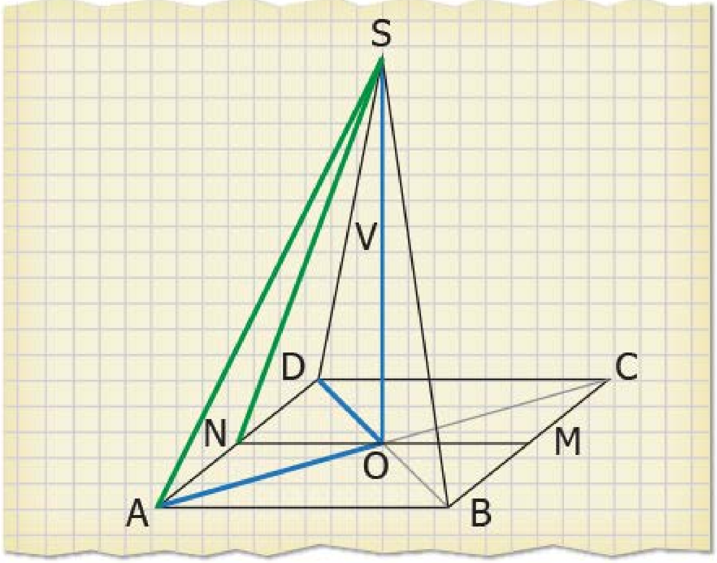
$m(\sphericalangle((VOM),(SOB))) = m(\sphericalangle(MO,BO)) = m(\sphericalangle MOB)$.

PASUL 3 **ABCD este pătrat, prin urmare are diagonalele perpendiculare**, și cum $AC \cap BD = \{O\}$ rezultă că $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$ și $BO = OC$. Obținem că **triunghiul BOC este dreptunghic isoscel**.



PASUL 4 Cum **M este mijlocul ipotenuzei** BC, rezultă că **OM este mediană și**, în același timp, **bisectoare**. Prin urmare $m(\sphericalangle MOB) = 45^\circ$. Obținem astfel că $m(\sphericalangle((VOM),(SOB))) = 45^\circ$.

III. 2 c) Știind că punctul H este proiecția punctului O pe planul (SAD), demonstrați că H este ortocentrul triunghiului SAD.



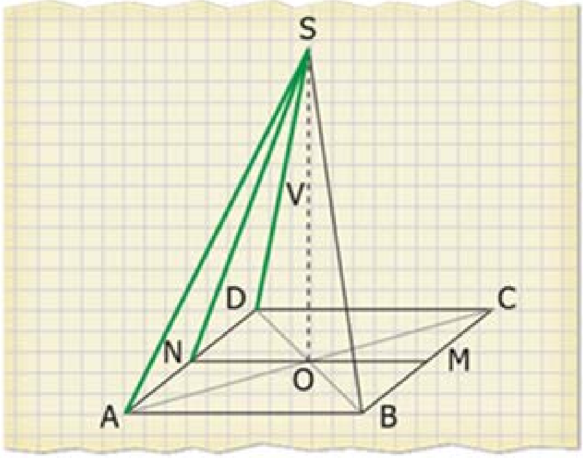
PASUL 1

Completăm figura cu SA și cu **SN**.

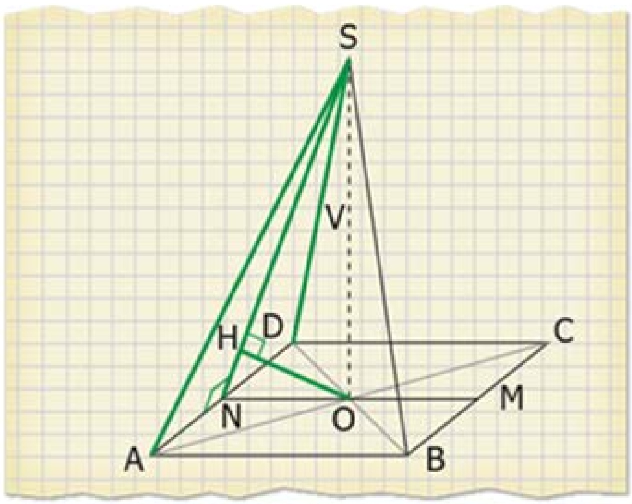
Cum $SO \perp (ABC)$, $OD, OA \subset (ABC)$ rezultă că **triunghiurile SOD și SOA sunt dreptunghice** în O. Comparăm cele două triunghiuri:

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle SOD) = m(\sphericalangle SOA) = 90^\circ \\ OD = OA = 8\sqrt{2}\ \text{m} \\ SO \text{ latură comună} \end{array}\right\} \overset{c.c}{\Longrightarrow} \triangle SOD \equiv \triangle SOA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SD = SA \Rightarrow \triangle SAD \text{ isoscel}$$



PASUL 2 În **triunghiul isoscel SAD, N este mijlocul bazei AD**, rezultă că SN **este mediană și**, în același timp, **înălțime**. Rezultă că $SN \perp AD$.
În altă ordine de idei, $MN \parallel AB$, $O \in MN$ și $AB \perp AD \Rightarrow ON \perp AD$.

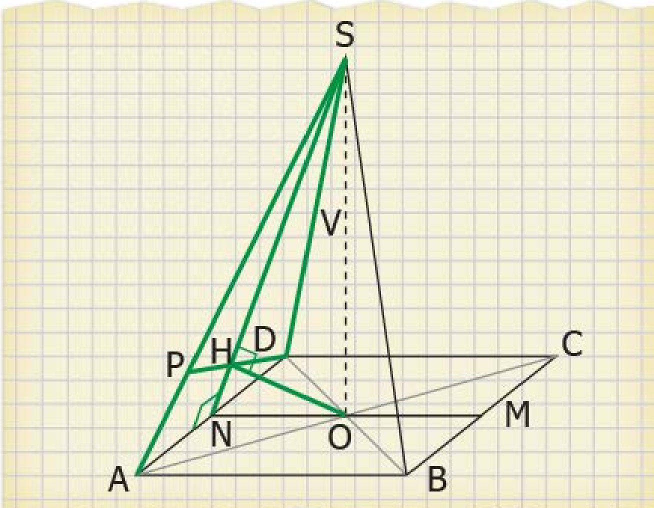


PASUL 3 Din

$$\left.\begin{array}{l} AD \perp SN \\ AD \perp ON \end{array}\right\} \Longrightarrow AD \perp (HON) \Rightarrow AD \perp HN.$$

Dar $SN \perp AD \Rightarrow H \in SN$, adică **H este situat pe înălțimea din S a triunghiului SAD**.

PASUL 4 **Demonstrăm**, în continuare, că **DH este înălțime** în triunghiul SAD. Deoarece $OD \perp OA$ (**diagonalele pătratului sunt perpendiculare**) și $OD \perp SO$, $SO \perp (ABC)$, precum și din faptul că $OA \cap SO = \{O\} \Rightarrow OD \perp (SOA)$. Dar cum SA **este inclusă** în planul $(SOA) \Rightarrow OD \perp SA$ (1)



PASUL 5 În altă ordine de idei, $OH \perp (SAD)$, **din ipoteză**, și **SA este inclusă** în planul $(SAD) \Rightarrow OH \perp SA$ (2).
Din relațiile (1) și (2) și din faptul că $OH \cap OD = \{O\} \Rightarrow SA \perp (ODH)$.
Dar cum DH este inclusă în planul $(ODH) \Rightarrow SA \perp DH \Rightarrow DH$ **este înălțime** în $\triangle SAD$, deci **H este ortocentru** în $\triangle SAD$.